

4° metodo algebrico dell'Ultimo problema di Fermat (UPF)

1 Introduzione.

In questa procedura risolutiva algebrica, di tipo elementare, dell'UPF oggi teorema:

- la condizione $\forall(a \leq b) \in \mathbb{N}^\circ$ si pone come Hp semplificativa perché le eventuali terne fermattiane (a,b,c) sono equivalenti a quelle (b,a,c) per cui serve per fare un ragionamento più lineare;
- si collegano direttamente le terne fermattiane (a,b,c) con le triadi in relazione pitagorica $[a,b,\sqrt{(a^2+b^2)}]$, sia terne pitagoriche che non;
- si confrontano le proprietà delle terne pitagoriche con quelle delle eventuali fermattiane;
- *la sua soluzione* (ed anche quella della relazione pitagorica) *dipende solo dal valore di a*;
- si deduce una nuova ed interessante tecnica di calcolo delle terne pitagoriche.

L'enunciato breve e semplice dell'**UPF**, diffuso nel 1600 da Pierre de Fermat, grida:

L'equazione

$$a^n + b^n = c^n \quad (1)$$

per $n > 2$ intero ed a, b, c **interi** e positivi è impossibile.

Sull'UPF si possono fare subito queste importanti osservazioni :

♥ Il suo enunciato:

- **se è vero**, afferma indirettamente che, se a e b sono interi, allora

$$c = \sqrt[n]{a^n + b^n} \quad (2)$$

soluzione della (1):

- non può essere, per il 2° principio di equivalenza delle equazioni, un numero razionale cioè né intero né frazionario;
- può essere solo **irrazionale**: *basta dimostrare questo per dimostrare l'UPF*;
- più correttamente dovrebbe essere posto in questo modo, anche se è lo stesso:

"L'equazione

$$a^n + b^n = c^n$$

*per $n > 2$ intero ed a, b, c **razionali** e positivi è impossibile. "*

- si può interpretare, secondo due punti di vista aventi difficoltà differenti:

1° $\forall(n > 2) \in \mathbb{N}^\circ \nexists (a,b,c) \in \mathbb{N}^\circ$ che soddisfi alla (1), in cui si può ipotizzare una

certa dipendenza di a e b da n;

2° $\forall (a \leq b) \in \mathbb{N}^\circ$ per ipotesi semplificativa ed $(n > 2) \in \mathbb{N} \nexists c \in \mathbb{N}^\circ \mid (a, b, c) \in \mathbb{N}^\circ$
soddisfi la (1), che *esclude* una qualsiasi dipendenza di a e b da n.

In particolare l'interpretazione del punto 2° permette di risolvere l'UPF tramite due evidenti possibilità, cioè dimostrare che la (2) per $n > 2$:

- ° non è mai intera per cui, per quanto detto, è irrazionale;
- ° è irrazionale come nella procedura risolutiva dell'UPF di tipo puramente geometrico visibile sul sito web www.problemadifermat.it.

Questa procedura risolutiva dell'UPF:

- * si sviluppa secondo l'interpretazione del punto 2°;
- * è relativa ad ogni valore di $n > 2$ della (1), sia **pari** che **dispari**;
- * dimostra che la (1), *in accordo con il suo enunciato*, ha soluzione

$$c = \sqrt[n]{a^n + b^n}$$

mai intera e più in generale **mai razionale**, ma solo **irrazionale**.

♥ Se $(a \leq b) \in \mathbb{N}^\circ$ per ipotesi semplificativa:

- è $c > b$, per cui è $a < b + c$ e $b < a + c$;
- è $c < a + b$ perché, per lo sviluppo del binomio di Newton è $a^n + b^n < (a + b)^n$.

Ne consegue che :

- $a > c - b$;
- $b > (c - a)$;
- $c > b - a$, ovviamente;

per cui a, b, c sono **in relazione triangolare** di cui ABC è il triangolo di vertice C;

- e si considera la successione naturale

$$[s_n] = \sqrt[n]{a^n + b^n} \quad (3)$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = b$$

quindi, all'aumentare di $n \in \mathbb{N}^\circ$ ed a partire da $n = 1$, la s_n assume i seguenti valori strettamente decrescenti

$$a + b > \sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt[3]{a^3 + b^3} > \sqrt[4]{a^4 + b^4} \dots > b \quad (3^*)$$

e tende al valore di b quando $n \rightarrow \infty$, per cui è

$$b < c < \sqrt{a^2 + b^2}$$

cioè la soluzione $c \in \mathfrak{R}^+$ della (1) si trova all'interno della triade :

- in relazione pitagorica $[a, b, \sqrt{a^2+b^2}]$ in generale;
- corrispondente alla terna pitagorica (a, b, c_p) , in particolare, se

$$c_p = [\sqrt{a^2+b^2}] \in \mathbb{N}^0;$$

che sarà chiamato **ambiente fermattiano**, o intervallo pitagorico, $]b, \sqrt{a^2+b^2}[$;

- per la relazione triangolare tra a, b e c , è possibile per la (1) anche una soluzione, *non usata in questa procedura*, di tipo carnottiano équivalent à la (2), cioè

$$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos j(n)} \quad (2^*)$$

ed equivalente alla (2) ed in cui $j(n)$, con $(n > 2) \in \mathbb{N}^0$, è l'angolo opposto al vertice C del triangolo ABC :

- * formato dai suoi lati a e b ;
- * dipendente da $n > 2$ e variabile con esso per la (3*);
- * variabile con la c per la (2) e la (2*);
- la soluzione trigonometrica o carnottiana (2*) è equivalente alla soluzione algebrica (2) perché la funzione fermattiana

$$y = a^n + b^n - x^n$$

per $n > 2$ ed $x \in \mathfrak{R}^+$ ha un'unica soluzione perché :

- * la sua derivata prima è < 0 : infatti è

$$y' = -n x^{n-1}$$

quindi è strettamente decrescente per $x \in \mathfrak{R}^+$;

- * quando x varia nell'intervallo fermattiano $]b, \sqrt{a^2+b^2}[$ passa da valori positivi a quelli negativi come nella seguente **Fig.1**, in cui in rosso c'è la funzione pitagorica.

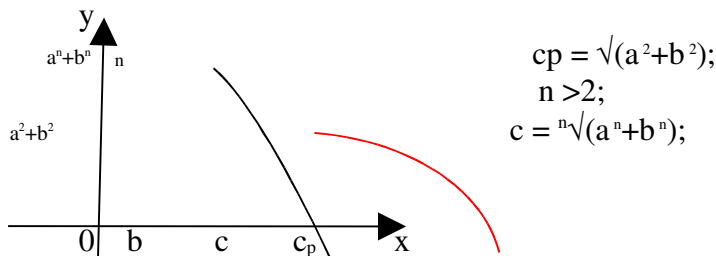


Fig.1 Stretta decrescenza della funzione fermattiana in $]b, \sqrt{a^2+b^2}[$.

Un programma dinamico di grafica in T. Pascal rileva la sua convergenza su b con $n \rightarrow \infty$.

2

Caratteristiche dell'ambiente fermattiano.

L'ambiente fermattiano:

- è costituito dall'intervallo aperto $]b, \sqrt{a^2 + b^2}[,$ in cui esistono le soluzioni $c \in \mathbb{R}^+$ della (1) secondo la (3*), che possono contenere gli eventuali $c \in \mathbb{N}^\circ$, che saranno chiamati **interi fermattiani**;
 - ha un'ampiezza e contenuto di interi fermattiani tanto più :
 - piccoli, quindi è meno ricco di interi, quanto più grande è b rispetto ad a ;
 - grandi, quindi è più ricco di interi, quanto più b è grande e quanto più $a \rightarrow b$;
 - tende ad annullarsi quando $b \rightarrow \infty$ a parità di a ;
- secondo la seguente **Fig.2** disegnata in una semicirconferenza di centro O e raggio a

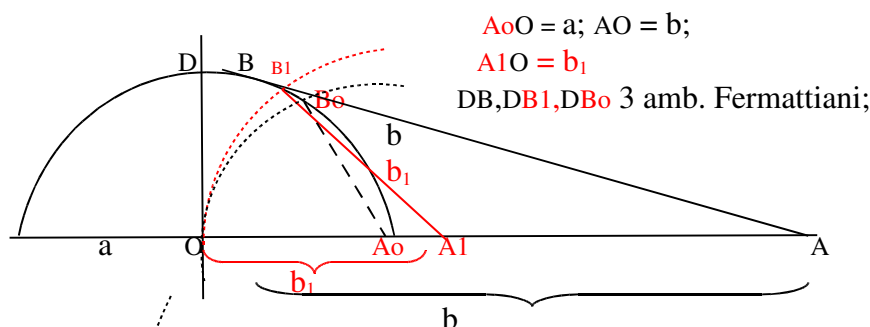


Fig.2 Rimpicciolimento dell'ambiente fermattiano quando b si allontana da a .

La **Fig.2** evidenzia che, se si considerano triadi in relazione pitagorica sia terne pitagoriche che non, l'ambiente Fermattiano più ricco di interi è quello con $a = b$, cioè intervallo $]a, a\sqrt{2}[,$ in figura l'ambiente DB_0 , ottenuto trasportando, con un arco di circonferenza di centro A_0 , il raggio $A_0O = a$ in A_0B_0 tratteggiato ed esso è :

- * tanto più grande quanto più è grande b e quanto più $a \rightarrow b$;
- * di evidente ampiezza massima rispetto agli altri ambienti fermattiani DB_1 e DB , disegnati con la stessa tecnica, cioè trasportando, con un arco di circonferenza di centro :
 - A_1 il suo raggio $A_1O = b_1$ in A_1B_1 ;
 - A il suo raggio $AO = b$ in AB ;

ma se $b > a$, come nei punti considerati A1 ed A, l'ambiente fermattiano, $]b, \sqrt{a^2+b^2}[$, disegnato con la stessa tecnica, diminuisce con l'aumentare di b e tende ad annullarsi, quindi a non avere alcun c intero, quando $b \rightarrow \infty$ a parità di a .

3 Confronto tra terne fermattiane e pitagoriche.

Innanzitutto si deve dire, per la (3*), che le terne pitagoriche e le eventuali terne fermattiane hanno a e b in comune per cui, è impossibile che terne pitagoriche e fermattiane possano coesistere, cioè, se per quei valori di $(a < b) \in \mathbb{N}^o$ esiste la terna pitagorica, non può esistere anche quella corrispondente fermattiana.

La dimostrazione di ciò si può effettuare *con certezza* dal punto di vista:

- *sia algebrico* che, comparsa sulla rivista Archimede, è la seguente:

se $a^2 + b^2 = c^2$ è una terna pitagorica deve necessariamente essere

$$c > a \text{ e } c > b \quad (*)$$

per cui, moltiplicando i tre addendi della relazione pitagorica rispettivamente per $a^{n-2}, b^{n-2}, c^{n-2}$ e ricordando che $c^2 = a^2 + b^2$, si ha per la (*)

$$a^2 * a^{n-2} + b^2 * b^{n-2} < a^2 * c^{n-2} + b^2 * c^{n-2} \Rightarrow a^2 * a^{n-2} + b^2 * b^{n-2} < c^2 * c^{n-2}$$

e quindi per $n > 2$ è

$$a^n + b^n < c^n$$

od anche, essendo $c = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{N}^o$, $a^n + b^n < \sqrt{a^2 + b^2}^n$;

- *sia puramente geometrico*, come è fatto :

* nei paragrafi più avanti di questa procedura risolutiva;

* nel sito web www.problemadifermat.it

al link “ *Risoluzione geometrica dell'UPF*”.

Si deduce che l'unica possibilità di esistenza delle terne fermattiane si ha quando la $\sqrt{a^2 + b^2}$ è irrazionale, **ma in questa procedura si farà un ragionamento più generale.**

Le caratteristiche delle eventuali terne fermattiane **primitive**, cioè di coprimi positivi (a, b, c) ed in relazione triangolare tra loro, *se esistono* e che soddisfano alla (1), sono quasi le stesse delle *terne pitagoriche primitive* (a, b, c_p) , per cui si ha che esse:

- con due numeri pari sono impossibili, perché non sarebbero tra loro coprimi;
- con tre numeri dispari tra loro coprimi sono impossibili, perché la somma di due potenze simili ad esponente $n \geq 2$ ed a base dispari è un numero pari e **da ciò discende che**, come

aspetto particolare dell'UPF (includente anche le terne pitagoriche):

- *è impossibile la scomposizione della potenza ennesima con $n \geq 2$ di un numero **dispari** nella somma di due potenze ennesime a base dispari;*

cioè, se $d_1 < d_2 < d$ sono dispari tra loro coprimi o non e sono in relazione triangolare, è

$$d^n \neq d_1^n + d_2^n ;$$

- sono formate da un solo pari per cui sono del tipo (p,d,D) , (d,p,D) , (d,D,p) , in cui $d < D$ sono dispari e p un numero pari tra loro coprimi, **al contrario delle terne pitagoriche primitive** che non sono mai del tipo (d,D,p) perché, essendo la loro conformazione $(d,d+2k,p)$ con $k \in \mathbb{N}^\circ$, per $n = 2$ è

$$p = \sqrt{(2d^2+4kd+4k^2)}$$

mai intero perché il radicando non è mai quadrato perfetto e da ciò **discende che:**

- * *le terne pitagoriche primitive non hanno mai c pari per cui in esse a e b devono essere uno pari e l'altro dispari o viceversa, **mentre c è sempre dispari;***
- * *è impossibile che il quadrato di un numero **pari** sia scomponibile nella somma dei quadrati di due numeri dispari. Invece il quadrato di un numero pari è trasformabile nella somma di due numeri pari al quadrato: basta considerare una terna pitagorica non primitiva con tutti e tre i termini pari, come per esempio (6,8,10).*

Più avanti si dimostrerà che non c'è alcuna soluzione intera della (1), anche con molti interi fermattiani nell'ambiente fermattiano, perché essi non soddisfano alla (1).

Con queste condizioni si vedrà in seguito che,
non ha soluzioni intere basta **solo**

* per dimostrare che l'UPF

4 Contenuti scientifici della procedura risolutiva.

Se $(a=b) \in \mathbb{N}^\circ$ la soluzione della (1) data dalla (2) è $c = a^{*n}\sqrt{2}$ che è irrazionale, perciò l'unico caso da considerare è quello in cui $a \neq b$ come segue.

Se $a \neq b$, in particolare *se è $(a < b) \in \mathbb{N}^\circ$* per ipotesi semplificativa, l'argomento scientifico utilizzato in questa procedura risolutiva dell'UPF è il teorema di Ruffini della differenza di potenze simili, che dice :

*la differenza di due potenze simili, ad esponente sia **pari** che **dispari**, è divisibile per la differenza delle loro basi.*

Infatti, la (1) si può scrivere

$$a^n = c^n - b^n \quad (4)$$

allora, per il teorema e la regola di Ruffini si ha, essendo $c-b > 0$ per la relazione triangolare esistente tra a , b e c ,

$$c^n - b^n = (c-b)(c^{n-1} + c^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

che, per la (4), diviene

$$a^n = (c-b)(c^{n-1} + c^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \quad (5)$$

la quale, essendo valida ovviamente anche per la relazione pitagorica, per $n = 2$ diviene

$$a^2 = (c-b)(c+b) \quad (5^*)$$

operante al di fuori dell'ambiente fermattiano cioè per valori di $c \geq \sqrt{a^2 + b^2}$ e per la quale, al variare di a, b interi, esistono senz'altro dei valori interi di c che la soddisfano perché suffragati dal teorema di Pitagora.

La (5) e (5*), essendo $c-b < a$ positivo, affermano che i due fattori al loro 2° membro devono essere divisori di a^n o di a^2 rispettivamente ed in particolare la (5*), dice che a^2 è dato dal prodotto di due semplici fattori $c-b$ e $c+b$, per cui la ricerca di terne pitagoriche è relativamente semplice rispetto alle fermattiane, perché opera solo con $n = 2$ e, scritti i divisori $c-b < a$ di a^2 , da ciascuno di essi, aggiungendovi b , si ricava c , che deve essere minore di $a + b$ e se, partendo dal $c-b < a$ più grande e proseguendo col loro decrescere, si arriva senz'altro, dopo gli eventuali casi in cui il primo membro è più piccolo del secondo, ad un valore di c per cui è:

° $a^2 = (c-b)(c+b)$ allora quel valore di c è, dopo a e b , il terzo termine di una terna pitagorica che, come si sa, ha c solo dispari, per cui se $c-b < a$ è :

* *dispari*, vuol dire che la terna pitagorica è del tipo (d, p, D) ;

* *pai*, vuol dire che la terna pitagorica è del tipo (p, d, D) .

Esempi di terne pitagoriche sono:

$$(5, 12, 13) \Rightarrow c-b = 1; \quad c+b = 25 \Rightarrow 5^2 = 1 \cdot 25;$$

$$(41, 840, 841) \Rightarrow c-b = 1; \quad c+b = 1681 \Rightarrow 41^2 = 1 \cdot 1681;$$

$$(8, 15, 17) \Rightarrow c-b = 2; \quad c+b = 32; \Rightarrow 8^2 = 2 \cdot 32;$$

altri esempi di questo tipo, con $c-b > 1$, sono:

$$(16, 63, 65); (20, 21, 29); (20, 99, 101); (21, 28, 35); (21, 220, 221).$$

che sono tutte del tipo (d, p, D) o (p, d, D) ed hanno c solo dispari;

° $a^2 > (c-b)(c+b)$, allora non esiste la terna pitagorica, però in questa procedura è da conoscere la $\sqrt{a^2 + b^2}$, in questo caso irrazionale $> c$, perché è un estremo dell'intervallo fermattiano.

Allo stesso modo la (5) $\forall (n > 2) \in \mathbb{N}$ afferma che, nell'intervallo pitagorico $]b, \sqrt{(a^2 + b^2)}]$, in cui si opera con i restanti, cioè dopo $n=2$, valori di $c-b < a$ divisori decrescenti di a^n , esiste un c intero, ricavato allo stesso modo e coprimo con a e b , soluzione della (1) se anche $(c^{n-1} + \dots + b^{n-1})$ lo è, cioè il suo 1° membro è uguale al 2°, altrimenti, cioè il primo membro è $>$ del 2°, la soluzione della (1), per quanto si è detto all'inizio, è irrazionale e maggiore di c .

A questo punto si deve dire che i $c-b$ divisori $< a$ di a^n ed a^2 , poiché sono minori di a , sono costituiti solo dai divisori $< a$ di a^2 , per cui in seguito i $c-b$ divisori $< a$ di a^n per $n \geq 2$ saranno chiamati **divisori di a^2** ed in questa proposta risolutiva dell'UPF si utilizzerà $\forall (n \geq 2)$ la seguente relazione

$$\begin{array}{ccc} \text{equivalente} & & \text{alla} \\ a^n/(c-b) = (c^{n-1} + \dots + b^{n-1}) & & (5^{**}) \end{array} \quad (5)$$

la quale :

- include, come visto, la (5*) per $n=2$ tramite la sua equivalente $a^2/(c-b) = (c + b)$;
- ha una caratteristica più particolare e più evidente della (5) rispetto alla variabilità dei loro due membri, perché **a parità di a** :
 - * ed **a parità di n** com'è :
 - sempre per $n = 2$;
 - in alcuni intervalli di $n > 2$;
 all'aumentare (al diminuire) di c il suo 1° membro diminuisce (aumenta) mentre il 2° aumenta (diminuisce);
 - * **l'aumentare di n** influenza la precedente variabilità in un modo più complesso: infatti, aumenta il suo 1° membro sia per l'aumento di n che per la diminuzione di $c-b$, mentre il suo 2° membro diminuisce con c al diminuire di $c-b$ ma aumenta con n per cui, essendo $c > a$ e $b > a$ può capitare che il suo 1° sia minore del suo 2° membro ed è necessario un aumento di n e, con il diminuire di $c-b$, di una diminuzione di c ;
- può essere utilizzata in tutto l'intervallo di $n \geq 2$, cioè:
 - * da $n = 2$, molto utile per conoscere gli estremi dell'intervallo fermattiano;
 - * fino ad $n \rightarrow \infty$ nell'intervallo fermattiano;
- dice che, per $n > 2$, il suo 2° membro è una progressione geometrica decrescente :
 - ° di ragione $q = b/c$ che è minore di 1 ma positiva;
 - ° la cui somma s dei suoi elementi è data da

$$s = a^n (q^n - 1)/(q - 1)$$

in cui $a_0 = c^{n-1}$ è il primo elemento della progressione, quindi la (5**) per $n > 2$ può essere anche

$$a^n/c-b = a_0 (q^n - 1)/(q-1)$$

Tale relazione non sarà utilizzata in questa proposta risolutiva dell'UPF.

4.1 Osservazioni sui divisori $c-b < a$ di a^2 .

La (5**) dice che :

- ♣ i divisori $c-b < a$ di a^2 sono:
 - ♠ i divisori $< a$, per la relazione triangolare tra a , b e c , di a^n per $n \geq 2$;
 - ♠ sono le entità algebriche responsabili della *possibile* esistenza o meno delle terne:
 - ♦ pitagoriche;
 - ♦ fermattiane per $n > 2$;
 prima della verifica della loro relazione data dalla (5**) valida per $n \geq 2$;
 - ♠ la condizione senza la quale non si possono avere, dopo a e b , i c interi pitagorici e fermattiani che devono essere *per le terne primitive* :
 - * coprimi con a e b ;
 - * minori di $a+b$ *in generale* per la relazione triangolare tra a, b, c ed *in particolare* minori della $\sqrt{a^2+b^2}$, per la (3*), se $n > 2$;
 - * ricavati **solo** da ciascuno di essi, tale che se in particolare:
 - è $c-b=1$, l'unico divisore di a^2 minore di a , allora:
 - vuol dire che l'ambiente fermattiano non ne ha nessuno, non ha alcun intero fermattiano , *cioè ricavato da un altro $c-b < a$ divisore di a^2* e quindi non ha alcuna terna fermattiana;
 - da esso si ha $c = b+1$ che **può** essere **solo** il terzo elemento, dopo a e b , della terna pitagorica corrispondente (a, b, c_p) , se essa esiste, **ma mai** può formare terna fermattiana (a, b, c) perché, in questo caso, nell'ambiente fermattiano non c'è alcun c fermattiano;
 - non c'è alcun $c-b < a$ divisore di a^2 , caso che si verifica se $a = 1$, allora la (5**) non può essere verificata per $n \geq 2$ e non esiste nemmeno la terna pitagorica;

Si deduce che è impossibile che :

- con d dispari primo, **una terna fermattiana:**
 - * **primitiva** sia della forma $(d, p, p+1)$, se p è un pari coprimo con d e $p+1$;
 - * sia del tipo $(d, D, D+1)$ con $D > d$ un dispari coprimo con d e $D+1$;
- **ed una terna pitagorica primitive** abbiano :
 - ♦ $a=2$, cioè $\forall (2, d)$ coppia, infatti la terna pitagorica sarebbe $(2, d, d+1)$, con due pari, mentre la fermattiana non ha alcun intero fermattiano;
 - ♦ $a=1$, cioè $\forall (1, b)$ coppia perché non c'è alcun $c-b < 1$ divisore di 1^2 ;
- ♠ sono molto importanti e necessari per poter da essi ricavare un c intero che per:
 - ♦ $n=2$, quindi al di fuori dell'ambiente fermattiano, soddisfi la relazione (5), (5^*) oppure la (5^{**}) per ricavare una terna pitagorica;
 - ♦ $n > 2$, cioè nell'ambiente fermattiano, soddisfi la (5^{**}) ;
- ♣ dei tre tipi teoricamente possibili di terne fermattiane:
 - ♠ solo la (d, p, D) (con la pitagorica corrispondente) e la (d, D, p) hanno i $c-b < a$ (cioè $D-p$ e $p-D$ minori di d) divisori di a^2 dispari, che:
 - ♦ solo se d è un numero primo ha, come **unico** divisore $< d$ di d^2 , $c-b=1$ ed ha le osservazioni del caso precedente e di cui esempi di terne pitagoriche del loro unico (d, p, D) tipo possibile sono
 $(3, 4, 5)$; $(5, 12, 13)$; $(7, 24, 25)$; $(11, 60, 61)$; $(13, 84, 85)$;
 $(19, 180, 181)$; $(23, 264, 265)$; $(41, 840, 841)$;...;
 - ♦ se invece d è :
 - la potenza k -ma di un numero primo num , cioè $d = num^k$, allora hanno $c-b = 1, num^{k-1}, num^{k-2}, \dots, num$, come divisori $< d$ di d^2 ;
 - il prodotto di due o più numeri dispari primi, per es. $d = d_1 \cdot d_2 \dots$, allora hanno $c-b = 1, d_1, d_2, \dots$ come unici divisori di d^n minori di d , per cui b e c possono essere **anche** consecutivi, come ad es. nelle terne pitagoriche del solo loro tipo teoricamente possibile (d, p, D) :
 $(9, 40, 41)$; $(21, 28, 35)$; $(21, 220, 221)$; $(25, 112, 113)$; $(27, 364, 365)$;
 $(39, 52, 65)$; $(39, 80, 89)$; $(39, 760, 761)$; $(49, 1200, 1201)$.
 Ma ciò è possibile solo per le terne Pitagoriche (a, b, c_p) e di conseguenza non lo è per le terne Fermattiane (a, b, c) ;
 - ♣ nel primo tipo di terne Fermattiane, cioè (p, d, D) , $c-b = D-d$ è un numero pari per cui,

se $k \in \mathbb{N}^\circ$ e p è del tipo:

♠ 2^k , come nelle seguenti terne Pitagoriche :

(8,15,17); (32,255,257); (64,1023,1025)...;

allora i divisori $c-b < p$ di $a^2 = p^2$ sono un numero pari del tipo 2^s con $(s < k)$ per cui è

$c-b = 1, 2, 4, 8$, ecc...;

♠ $2^k \cdot d_1, 2^k \cdot d_1 \cdot d_2, d_1, d_2, \dots$, con $d_1, d_2, \dots$ dispari primi e $(k < n) \in \mathbb{N}^\circ$, allora i $c-b < p$ divisori di p^2 sono : $1, 2^k, 2^{k-1}, \dots, 2, 2^s \cdot d_1, 2^s \cdot d_2, \dots$ con $(s < k) \in \mathbb{N}^\circ$, come nelle:

◦ terne pitagoriche

(20,21,29); (40,399,401); (56,105,119);

(56,783,785); (60,91,109); (60,221,229);...;

in cui, anche se un $c-b=1$, non può esistere la terna pitagorica con $c = b+1$ consecutivo di b perché c sarebbe un altro pari;

◦ nelle triadi in semplice relazione Pitagorica, come

(20,23,30.4...); (40,401,402.8...); (56,109,122.5...); ...;

perciò **c'è la possibilità teorica di avere terne Fermattiane**, perché la $\sqrt{(a^2+b^2)}$ è irrazionale, e ciò è da **dimostrare/confutare**.

Da quanto detto si possono riassumere i seguenti concetti importanti:

- per c fermattiani si deve intendere gli interi:
 - appartenenti all'ambiente fermattiano, cioè:
 - * compresi tra b e $\sqrt{(a^2+b^2)}$;
 - * ricavati **solo** da *alcuni* divisori $c-b < a$ di a^2 , cioè da quelli rimanenti dopo aver esaurito quelli necessari per trovare la triade in relazione pitagorica;
 - che, alla fine dei calcoli con la (5**), per formare una terna fermattiana primitiva, devono essere anche coprimi con a e b ;
- dati $(a < b) \in \mathbb{N}^\circ$ coprimi tra loro, **se a è un dispari primo**, non esistono c fermattiani interi per cui la (1) ha soluzione solo irrazionale $\forall (n > 2) \in \mathbb{N}$;
- le terne Fermattiane sono impossibili se a è uguale:
 - ad 1, perché non c'è alcun $c-b < 1$ divisore di 1^2 : anche una terna pitagorica in questo caso è impossibile;
 - a 2, perché nell'ambiente *fermattiano* non c'è alcun $c-b < 2$ di 2^2 .

N.B. : In seguito i $c-b < a$ divisori di a^2 si chiameranno, per brevità, $c-b$.

4.2 Procedura risolutiva.

E' evidente che questa procedura risolutiva dell'UPF è relativa solo alle eventuali terne fermattiane primitive per l'ipotesi semplificativa iniziale $\forall (a < b) \in \mathbb{N}^\circ$ coprimi tra loro, perché quelle non primitive sono una loro conseguenza.

Da quanto detto segue che, dati $(a < b) \in \mathbb{N}^\circ$ tra loro coprimi, scritti i divisori $c-b$ e si utilizza la (5**) a cominciare da $n = 2$, se c , per la (3*), parte dal suo valore massimo ricavato dal $c-b$ massimo, allora si può avere all'inizio il suo 1° membro minore del 2° ma, passando di seguito agli altri suoi valori decrescenti, ci sarà senz'altro un **c intero** per cui il primo membro della (5**) è uguale o maggiore del suo 2° membro e se è:

- ° $a^2/(c-b) = (c+b)$, quel valore di c è soluzione della relazione pitagorica;
- ° $a^2/(c-b) > (c+b)$, allora la soluzione della relazione pitagorica non è intera ma, come già detto, irrazionale e maggiore di c ;
viene, così, definito l'intervallo fermattiano.

Trovata la triade in relazione pitagorica si prosegue a decrescere allo stesso modo con gli *eventuali* restanti divisori $c-b$ ed operando sempre con la (5**) però nell'habitat fermattiano, cioè per $n > 2$. Si dimostrerà in seguito che l'uguaglianza (5**) può esistere solo per $n=2$ e mai per $n > 2$.

5 Le terne Fermattiane sono impossibili.

Si è già dimostrato al § 3 l'impossibilità delle terne fermattiane (a, b, c) quando esiste la corrispondente terna pitagorica (a, b, c_p) , per cui l'unica possibilità della loro esistenza può aversi quando non esiste la terna pitagorica, cioè la $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ è irrazionale.

Ora si vuole fare una dimostrazione, di tipo geometrico, che le terne fermattiane sono impossibili in assoluto, cioè per qualsiasi coppia di a e b , sia tra loro coprimi e non, come segue.

La dimostrazione dell'impossibilità delle terne fermattiane (a, b, c) in assoluto, cioè per una qualsiasi coppia di a e b , si può effettuare più semplicemente, e più logicamente per l'esistenza della relazione triangolare tra a , b e c , dal punto di vista geometrico, com'è stato il teorema di Pitagora per le terne pitagoriche.

Infatti, scrivendo la (1) nella seguente forma cubica (ma c'è anche la sua forma pitagorica)

$$(a/c)^{n-3} \cdot a^3 + (b/c)^{n-3} \cdot b^3 = c^3 \quad (6)$$

si può interpretare geometricamente e dimostrare la *sua inequivalenza geometrica* $\forall (n \geq 3) \in \mathbb{N}$, per cui la (6) o la (1), al contrario della relazione pitagorica, è dal punto di vista geometrico una disuguaglianza mentre da quello algebrico è un'uguaglianza.

La dimostrazione dell'inequivalenza geometrica della (1) avrà, e deve avere, i suoi riflessi algebrici, come il teorema di Pitagorica li ha avuti per la relazione pitagorica, per cui la (5**) avrà **solo** per $n > 2$ il 1° membro diverso dal 2° membro, cioè *maggiore o minore* di esso .

5.1 Dimostrazione dell'inequivalenza geometrica della (1) per $n=3$.

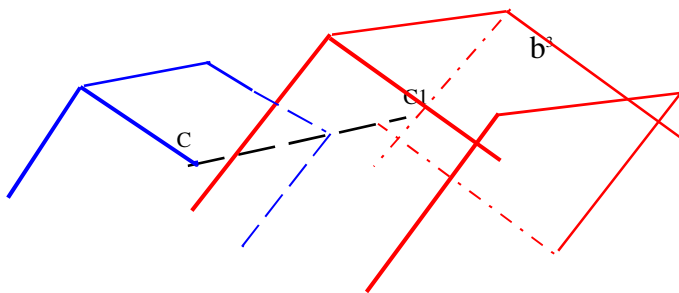
Teorema *E' geometricamente impossibile l'equivalenza tra due cubi ed un unico cubo.*

Si consideri prima $a < b$ per Hp semplificativa:.

Se il simbolo " $\cong$ " indica il predicato "è equivalente a...", si ha:

Hp: $\wedge$ ACB angolo retto; ABCA1B1C1 prisma triangolare;
 $BC = a$; $AC = b$; $AB = c_p = \sqrt{a^2 + b^2}$;
 BC^3 , AC^3 cubi su facce cateto del prisma; AB^3 cubo Pitagorico;
Th: $BC^3 + AC^3 \cong$ unico cubo è impossibile.

La figura spaziale del teorema, la **Fig.3**,



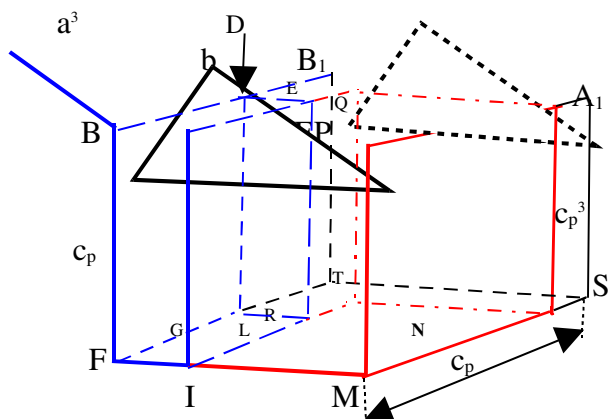


Fig.3 *L'equivalenza geometrica fra due cubi ed un cubo è impossibile.*

evidenzia con linee intere e tratteggiate, in blu elettrico, rosse e nere :

- ♦ *l'equivalenza :*
 - *pitagorica ed euclidea* del **piano**, come sua sezione ortogonale, per cui, e questo è molto importante, a e b sono le misure dei cateti del triangolo rettangolo di base del prisma, cioè sono i primi due elementi di una triade in relazione pitagorica $[a, b, \sqrt{(a^2 + b^2)}]$, **sia terna pitagorica che non**;
 - *euclidea* dello **spazio**, ottenibile con due traslazioni, ortogonali al piano che le contiene e di vettori di modulo a e b , delle corrispondenti figure piane euclidee, tra i due cubi BC^3 e AC^3 dell'**Hp** ed i due parallelepipedi ottenuti dalle suddette traslazioni e poggiati sulla faccia ipotenusa del prisma, cioè $BDEHIFGL$ e $DAHIMNRQ$ rispettivamente (ma c'è anche una dimostrazione più rigorosa che per brevità non viene riportata ed è visibile sul sito web www.problemadifermat.it al link Risoluzione geometrica dell'UPF);
- ♦ *il cubo pitagorico* AB^3 , di vertici $ABFMSTB_1A_1$, ottenibile con una semplice traslazione, ortogonale al piano che lo contiene e di vettore di modulo c_p , del quadrato pitagorico sull'ipotenusa;
- ♦ *la prevalenza* su $BC^3 + AC^3$ del cubo pitagorico, che li contiene abbondantemente tramite i due parallelepipedi ad essi equivalenti sulla faccia ipotenusa del prisma;

◆ **che:**

- l'equivalenza geometrica della **Th**, $BC^3 + AC^3 \cong$ cubo è **impossibile**, in rispetto dei teoremi di Euclide e Pitagora del piano che, altrimenti, scomparirebbero;
- i volumi di due cubi non possono essere contenuti in un unico cubo;
- al contrario di a^3, b^3 e c_p^3 , l'ipotetico cubo fermatiano c^3 non è definito geometricamente per cui i volumi di a^3, b^3, c^3 sono **universalmente** non commensurabili, mentre le loro superfici pitagoriche, $a^2, b^2, \sqrt{(a^2+b^2)^2}$, sono universalmente commensurabili, per conseguenza le equazioni (6) o (7) ed (1) sono geometricamente impossibili;
- il c^3 cubo fermatiano si trova tra b^3 e c_p^3 , cioè è $b^3 < c^3 < c_p^3$.

La caratteristica importante di tale figura è che con $a \neq b$, si forma un *vuoto geometrico* parallelepipedo, che ha dimensioni di base $AB-AH = b-a$ ed altezza $h = c_p$ che rinforza il precedente concetto di prevalenza del cubo pitagorico su a^3+b^3 .

Si consideri ora il caso $a=b$

Osservando la stessa **Fig.3**, in cui però è $a = b$ ed $a^3=b^3$, il cubo pitagorico $c_p^3=(a\sqrt{2})^3$ contiene ancora i due cubi congruenti, ma scompare il vuoto geometrico che prima era originato da $a \neq b$.

Intuitivamente l'equivalenza della **Th** si potrebbe raggiungere, in entrambi i casi e specialmente se $a=b$ che non ha il vuoto geometrico, immaginando di effettuare una opportuna rotazione, con centro nel vertice C, antioraria del segmento BC oppure oraria del segmento AC, allo scopo di diminuire *con continuità* il segmento AB sino a che essa possa verificarsi. Ma questo è *geometricamente impossibile*, specialmente per la presenza del vuoto geometrico se $a \neq b$ e perché scomparirebbero in entrambi i casi le equivalenze pitagorica del piano ed euclidee del piano e dello spazio che devono coesistere.

L'effetto del vuoto geometrico inoltre, se $a \neq b$, è quello d'impedire, nonostante la continuità della rotazione effettuata, la formazione del cubo fermatiano di spigolo

$$c = \sqrt[3]{a^3+b^3}$$

che sia equivalente ai due cubi dell'ipotesi.

5.2 Dimostrazione dell'inequivalenza geometrica della (1) per $n > 3$.

Si consideri la (1) nella forma cubica (6). Poiché, per precedente dimostrazione, $\forall (a \leq b) \in \mathbb{N}^\circ$, è per $n=3$

$$a^3 + b^3 < [\sqrt{(a^2+b^2)}]^3$$

a maggior ragione il primo membro della (6), per $n > 3$, deve essere minore del suo 2° membro per la (3*) ed ancora perché i termini cubici del 1° membro della (6) sono moltiplicati per un fattore esponenziale positivo ma minore di 1 che decresce continuamente di valore quando n aumenta, essendo $a \leq b < c$. Perciò la (6) e quindi anche la (1) dal punto di vista geometrico sono una disequaglianza per $n \geq 3$.

6 Conclusioni

Da tale impossibilità geometrica deriva che il 1° membro della (5**), per $n \geq 3$ ed al variare di c nell'ambiente fermattiano, *acquisterà solo valori minore o maggiore del suo 2° membro per cui:*

- * partendo dal $c-b < a$ più grande, cioè dal c più grande, si trova prima per quale valore di c la (5*) per $n=2$ ha il c pitagorico intero od irrazionale e si definisce, così, l'ambiente fermattiano;
- * proseguendo nei restanti $c-b$ dell'ambiente fermattiano a decrescere si trova per quale valore di c la (5**) ha $\forall (n \geq 3) \in \mathbb{N}$ il 1° membro $>$ del 2°, per cui la soluzione della (1) ha per quel valore di n soluzione maggiore del c corrispondente ed è *irrazionale* perché, oltre a quanto si è detto all'inizio di questa procedura non essendo c intero, in una disequazione non è possibile estrarre la radice ennesima che, al contrario, si ricava con la (2) dall'equazione algebrica (1).

Dopo l'esaurimento dei $c-b < a$ divisori di a^2 sino al corrispondente valore di n per tutti gli n successivi, la (1) ha solo soluzioni irrazionali convergenti su b quando $n \rightarrow \infty$.

E' superfluo affermare che, se:

- ***non esiste alcun $c-b < a$ divisore di a^2 , caso che si verifica quando $a=1$, non c'è nemmeno la terna pitagorica;***

- nell'ambiente fermattiano non c'è alcun intero fermattiano, la soluzione della (1) $\forall (n>2) \in \mathbb{N}$ è irrazionale: questo caso si verifica quando
 - a è un primo dispari oppure pari;
 - $b \rightarrow \infty$ ed a è costante.
 - 1 oppure 2;
- a è il multiplo di un altro valore di a si hanno le terne fermattiane non primitive.

7 Deduzioni logiche.

Una conseguenza logica di tale proposta risolutiva dell'UPF è il ricavo di una nuova tecnica e regola pratica, *basate solo sulla conoscenza di a* primo o non primo, di ricerca delle terne pitagoriche, sulle quali si trova un documento nel sito web

www.problemadifermat.it

Tale tecnica e relativa regola pratica si basano sulla scrittura della relazione pitagorica nella forma (5*), cioè

$$a^2 = (c-b)(c+b) \quad (5^*)$$

e consistono in questo:

- 1° si fornisce a e si fattorizza il suo quadrato;
- 2° si dividono i fattori della fattorizzazione di a^2 in tutte le loro *coppie* di fattori possibili che sono suoi divisori, diverse da a^2 perché, per la relazione triangolare tra a , b e c , deve essere $c-b < a$;
- 3° si dà a $c-b$ il fattore $< a$ di una coppia scelta e l'altro lo prende $c+b$;
- 4° si calcola b in questo modo, ovviamente,

$$b = [(c+b)-(c-b)]/2;$$
- 5° se b è intero si assume come 2° elemento della terna pitagorica altrimenti si va al 7° punto;
- 6° sapendo b , si calcola c_p dal valore di $c-b$ oppure di $c+b$.
- 7° si ritorna al punto 3° con un'altra coppia, sino ad esaurire tutte le coppie.

Le terne trovate sono di tipo primitivo e non : quelle non primitive si ottengono quando a è il multiplo di un numero primo ed a volte, cioè quando $c-b$ e $c+b$ sono entrambi pari, per cui la loro differenza è pari, si ottiene la terna equivalente (b,a,c) invece di (a,b,c) con $b < a$.

Si deve sottolineare che, quando a è un primo (dispari o non) all'unico divisore $c-b=1 < a$ di a^2 deve corrispondere sempre, dal punto di vista teorico una triade di valori interi con b e c consecutivi, ma non tutti sono terne pitagoriche perché, come dice anche la (5*), se $c-b=1$ deve essere anche $a^2 = c+b$, per cui le triadi di valori interi teoricamente ottenuti come

(17,72,73); (29,610,611); (31,480,481); ecc...

per questo motivo, **non sono terne pitagoriche**.

8 Alcuni esempi esplicativi.

1°) **$a = 20$; $b = 21$** ; divisori $c-b < a$ di $a^2 = 400$: 1,2,4,5,8,10,16.

$n=2$ i c ottenuti a partire dal $c-b < a$ più grande devono essere $< a+b = 41$, per cui si ha:

$$a^2/(c-b) \geq (c+b) \quad (5^*)$$

$$c-b = 16; \text{ da cui } c = 21+16 = 37; \Rightarrow 400/16 < 37 + 21 \Rightarrow 25 < 58;$$

$$c-b = 10; \text{ " } c = 21+10 = 31; \Rightarrow 400/10 < (31 + 21) \Rightarrow 40 < 52;$$

$$c-b = 8; \text{ " } c = 21 + 8 = 29; \Rightarrow 400/8 = (29 + 21) \Rightarrow 50 = 50 ;$$

La terna pitagorica esiste per questi valori di $a < b$ ed è

(20,21,29);

$n \geq 3$ $a^n/(c-b) \geq (c^{n-1} + \dots + b^{n-1})$;

Per il problema di Fermat, cioè per $n \geq 3$, rimangono, quindi, i restanti $c-b < a$, divisori di a^2 , che danno $c < \sqrt{(a^2+b^2)} = 29$: 1,2,4,5.

Perciò, incominciando dal $c-b$ più grande ed a decrescere si ha, per :

$n = 3$ $a^3/(c-b) \geq c^2 + cb + b^2$;

$$c-b = 5 \text{ da cui } c = 26 \Rightarrow 8000/5 < 26^2 + 26 \cdot 21 + 21^2 \Rightarrow 1600 < 1663;$$

$$c-b = 4 \text{ da cui } c = 25 \Rightarrow 8000/4 > 25^2 + 25 \cdot 21 + 21^2 \Rightarrow 2000 > 1591;$$

possiamo, quindi, dire che, per **$n = 3$** , c non è intero, è > 25 ed è irrazionale, uguale a

$$c = 25,84374\dots;$$

$n = 4$ $a^4/(c-b) \geq c^3 + c^2b + cb^2 + b^3$;

$$c-b = 2 \text{ da cui } c = 23 \Rightarrow 160000/2 > 23^3 + 23^2 \cdot 21 + 23 \cdot 21^2 + 21^3 \Rightarrow 80000 > 42680;$$

Si può, quindi, dire che, per **$n = 4$** , c non è intero, è > 23 , irrazionale ed

È uguale a

$$c = 24,400476;$$

$n = 5$ $c-b = 1 \quad c = 22 \Rightarrow 3200000 > 23^4 + 23^3 \cdot 21 + 23^2 \cdot 21^2 + 23 \cdot 21^3 + 21^4 \Rightarrow$

$$3200000 > 23^3(23+21)+21^2(23^2+23*21+21^2) \Rightarrow$$

$$1600000 > 535340+441*1453 \Rightarrow$$

$$3200000 > 1176113$$

Per **n = 5** c non è intero, è > 23 irrazionale ed è **c = 23,57628;**

Si deduce che tutti gli $n > 5$, poiché non ci sono altri interi fermattiani, hanno c irrazionale e compreso tra $b = 21$ e 23 .

Con un programma T. Pascal si hanno le seguenti soluzioni approssimate a 8 cifre decimali indicando con c_n la soluzione relativa ad n dell'esercizio precedente:

$c_3 = 25,84374459...$; $c_4 = 24,400476200...$; $c_5 = 23,57627712...$; $c_6 = 23,04458771...$;
 $c_7 = 22,54405813...$; $c_8 = 22,40168843...$; $c_9 = 22,19352866...$; $c_{10} = 22,02963885...$;
 $c_{11} = 21,89756899...$; $c_{12} = 21,78911911...$; $c_{13} = 21,69868922...$; $c_{14} = 21,62229930...$;
 $c_{15} = 21,55708937...$; $c_{16} = 21,50087944...$; $c_{17} = 21,45205949...$; $c_{18} = 21,40935954...$;
 $....$; $c_{22} = 21,28256968...$; $c_{23} = 21,25898971...$; $....$; $c_{28} = 21,17110980...$;

oo

2°) a = 20; b = 23 i $c-b < a$ divisori di a^2 sono gli stessi di $a = 20$ e $b = 21$: **1,2,4,5,8,10,16;**

n=2 $a^2/(c-b) \geq (c+b)$

c-b=16; $c = 16+23 = 39$; $400/16 < 62$; $25 < 62$;
c-b=10; $c = 10+23 = 33$; $400/10 < 56$; $40 < 56$;
c-b=8; $c = 8+23 = 31$; $400/8 < 54$; $50 < 54$;
c-b=5; $c = 5+23 = 28$; **400/5 > 51;** **80 > 48;**

Si può, quindi, dire che, per **n=2**, c non è intero, è >25 ed è irrazionale e ciò vuol dire che non c'è terna pitagorica ma una triade in relazione pitagorica **(20,23,30.4...)**;

n ≥ 3 $a^n/(c-b) \geq (c^{n-1} + ... + b^{n-1})$;

i restanti $c-b < a$ divisori di **400** e che danno un $c < 30.4...$ sono solo: **1,2,4.**

n=3 **c-b=4** **c=27** $8000/4 > 27^2 + 27*23 + 23^2$; $\Rightarrow$ **2000 > 1879;**

Per cui per **n=3** **c > 27** ed è irrazionale ed è **c = 27,21953...;**

n=4 **c-b=2** **c=25** $16000/2 < 25^3 + 25^2*23 + 25*23^2 + 23^3$ $\Rightarrow$

$8000 < 15625 + 14375 + 13225 + 12167 \Rightarrow$ **8000 < 55392;**

Per cui per **n=4** **c > 25** ed è irrazionale ed è **c = 25,75278...;**

n=5 **c-b=1** **c=24;** $3200000 > 24^4 + 24^3*23 + 24^2*23^2 + 24*23^3 + 23^4 \Rightarrow$

$3200000 > 331776 + 317952 + 304704 + 202008 + 279841 \Rightarrow$

$$3200000 > 1526281;$$

Per cui per $n = 5$ $c > 24$ ed è irrazionale ed è

$$c = 24,93346...;$$

I restanti n hanno c irrazionale compresi tra 23 e 25;

oo

3°) $a=100$; $b=101$

I divisori < 100 di $a^2 = 10000 = 2^5 \cdot 5^4$ sono: 1,2,4,5,8,10,16,20,25,40,50,80;

$$n=2 \quad a^2/(c-b) \geq (c+b);$$

$$c-b=80; \quad c=181 \quad 10000/80 < 282 \Rightarrow 125 < 282;$$

$$c-b=50; \quad c=151 \quad 10000/50 < 252 \Rightarrow 200 < 252;$$

$$c-b=40; \quad c=141 \quad 10000/40 > 242 \Rightarrow 250 > 242;$$

Allora c_p è irrazionale, infatti è $cp = 142,1...$ e la triade in relazione pitagorica è

$$(100;101;142,1...);$$

$$n \geq 3 \quad a^n/(c-b) \geq (c^{n-1} + \dots + b^{n-1});$$

I restanti $c-b < 100$ divisori di 10000 e che danno un $c < 142,1...$ sono:

$$1,2,4,5,8,10,16,20,25.$$

$$n=3 \quad c-b=25 \quad c=126 \quad 8000/4 > 27^2 + 27 \cdot 23 + 23^2; \Rightarrow 2000 > 1879;$$

$$100^3/25 \geq 126^2 + 126 \cdot 101 + 101^2 \Rightarrow 40000 > 38803.$$

Per cui per $n=3$ è $c > 126$ ed è irrazionale

$$c = 126,62152...;$$

$$n=4 \quad c-b=20 \quad c=121 \quad 100^4/20 > 126^3 + 126^2 \cdot 101 + 126 \cdot 101^2 + 101^3 \Rightarrow 500000 < 2^\circ \text{ memb};$$

$$c-b=16 \quad c=117 \quad 100^4/16 > 117^3 + 117^2 \cdot 101 + 117 \cdot 101^2 + 101^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6250000 > 1601613 + 1382589 + 1193517 + 1030301 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 625000 < 5208020$$

Per cui per $n=4$ $c > 117$ ed è irrazionale ed è

$$c = 119,51976...;$$

$$n=5 \quad c-b=10 \quad c=111; \quad 100^5/10 < 111^4 + 111^3 \cdot 101 + 111^2 \cdot 101^2 + 111 \cdot 101^3 + 101^4 \Rightarrow$$

$$100^4 < 141807041 + 138130731 + 125686521 + 104060401 \Rightarrow$$

$$100^4 < 509684694;$$

$$c-b=8 \quad c=109; \quad 100^5/8 \geq 109^4 + 109^3 \cdot 101 + 109^2 \cdot 101^2 + 109 \cdot 101^3 + 101^4 \Rightarrow$$

$$100^5/8 \geq 1295025 \cdot 210 + 101^2 \cdot 109(210) + 104060401 \Rightarrow$$

$$100^5/8 \geq (1295025 + 1111909(210) + 104060401) \Rightarrow$$

$$1250000000 \geq (1295025 + 233500890 + 104060401) \Rightarrow$$

$$1250000000 > 338856316$$

allora la soluzione della (1) per $n=5$ è > 109 , è irrazionale ed è $c=115,44990...;$

n=6

c-b=5 c=106

$$\begin{aligned}
100^6/5 &\geq 106^5 + 106^4*101 + 106^3*101^2 + 106^2*101^3 + 106*101^4 + 101^5 \Rightarrow \\
200000000000 &\geq 106^3(106^2+106*101+101^2)+101^3(106^2+106*101+101^2) \Rightarrow \\
200000000000 &\geq (106^3+101^3)(106^2+106*101+101^2) \Rightarrow \\
200000000000 &\geq 2221317*32143 \Rightarrow 200000000000 \geq 2221317*32143 \\
\mathbf{200000000000} &\mathbf{> 71399792231}
\end{aligned}$$

la soluzione della (1) per **n = 6** è > 106, è irrazionale ed è

c = 112,81442...;

n=7

c-b=4 c=105

$$\begin{aligned}
100^7/4 &\geq 105^6 + 105^5*101 + 105^4*101^2 + 105^3*101^3 + 105^2*101^4 + 105*101^5 + 101^6 \Rightarrow \\
100^7/4 &\geq (105^4+101^4)(105^2+105*101+101^2) + 105^3 \Rightarrow \\
100^6 * 25 &\geq 12766876020*31831 + 1157625 \Rightarrow \\
25000000000000 &< 396846145361253 ;
\end{aligned}$$

c-b=2 c=103

$$\begin{aligned}
100^7/2 &\geq 102^6 + 102^5*101 + 102^4*101^2 + 102^3*101^3 + 102^2*101^4 + 102*101^5 + 101^6 \Rightarrow \\
\mathbf{100^7/2} &\mathbf{> (102^4+101^4)(102^2+102*101+101^2) + 102^3;}
\end{aligned}$$

allora la soluzione della (1) per **n = 7** è > 103, è irrazionale ed è **c = 110,96924...;**

Dando solo i risultati a 8 cifre decimali di un programma T. Pascal si ha: **c_p = 142,13023...;**

c₃ = 126,62520681...; c₄ = 119,51975542...; c₅ = 115,4490181...;
; c₁₀ = 107,72523292...; c₁₁ = 107,04987564...;;
 c₁₅ = 105,27128280...; c₁₆ = 104,96898402...; c₁₇ = 104,7031109...; ecc...

oo

Facciamo ora un esempio in cui a < b è un numero primo dispari ed in cui, come detto, i divisori c-b < a di a² sono soltanto 1:

4°) a = 23; b = 24; i divisori < 23 di a² = 529 sono solo c-b = 1;

n=2

a²/(c-b) ≥ (c+b)

perciò l'unica possibilità di terna pitagorica, se esiste per questi valori di a e b, è quella con c = b+1 = 25, ma è

$$a^2/(c-b) > (c+b) \Rightarrow 529 > 25;$$

cioè c_p è irrazionale, infatti è

$$23^2 + 24^2 \neq 25^2 \Rightarrow 529 + 576 \neq 625 \Rightarrow 1105 > 625$$

per cui è cp = √1105 = 33,2... e la triade in relazione pitagorica è (23,24,33.2...);

n ≥ 3

aⁿ/(c-b) ≥ cⁿ⁻¹ + ... + bⁿ⁻¹;

Infatti, con i logaritmi si ha per:

n=5 da cui $c = \sqrt[5]{(6436343+7962624)} \rightarrow \log c = 1/5 * \log 14398967 = 1/5 * 7,15833 = 1,43167$
 $c = 27,02...;$

$$\mathbf{a} = \mathbf{d}_1 * \mathbf{d}_2 * \mathbf{d}_3 * \mathbf{d}_4, \dots$$

Prendiamo il caso che $a = d_1 * d_2 * d_3 = 3 * 5 * 7 = 105$;

c-b = 1,3,5,7,9,15,21,25,35,45,49,63,75;

(105,139,174.20...);

n =3 c-b = 25; c = 164;

$$1157625/25 < 164^2 + 164 \cdot 139 + 139^2 \Rightarrow 46305 < 26896 + 22796 + 19321 \Rightarrow 46305 < 69013;$$

c-b=21; c = 160;

$$1157625/21 < 160^2 + 160 \cdot 139 + 139^2 \Rightarrow 55125 < 25600 + 22240 + 19321 \Rightarrow 55125 < 67161;$$

c-b = 15; c = 154

$$1157625/15 > 154^2 + 154 \cdot 139 + 139^2 \Rightarrow 77175 > 23716 + 21406 + 19321 \Rightarrow 77175 > 64443;$$

Perciò la soluzione della (1) per n = 3 è irrazionale, > di 154).

Con i logaritmi decimali o di Briggs si ha, infatti :

$$\log c = 1/3 \log(1157625 + 2685619) = 1/3 \log 3843244 = 1/3 \cdot 6,58469 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log c = 2,19489 \text{ da cui } \mathbf{c = 156,67...;}$$

n=4

c-b = 9; c = 148;

$$105^4/9 > 148^3 + 148^2 \cdot 139 + 148 \cdot 139^2 + 139^3 \Rightarrow 121550625/9 > (148^2 + 139^2)(148 + 139) \Rightarrow$$

13505625 > 11831575;

perciò per **n = 4** la c fermattiana è irrazionale e > 148 che, ricavata con un programma T. Pascal ed approssimata ad 5 decimali è : **c = 149,14846...;**

n=5

c-b = 7; c = 146;

$$105^5/7 > 146^4 + 146^3 \cdot 139 + 146^2 \cdot 139^2 + 146 \cdot 139^3 + 139^4 \Rightarrow$$

$$12762815625/7 > 146^2(146^2 + 146 \cdot 139 + 139^2) + 139^3(146 + 139) \Rightarrow$$

$$1823259375 > 21316 \cdot 60931 + 2685619 \cdot 285 \Rightarrow$$

1823259375 < 2064206611;

c-b = 5; c = 144;

$$105^5/5 < 142^5 + 142^4 \cdot 139 + 142^3 \cdot 139^2 + 142^2 \cdot 139^3 + 142 \cdot 139^4 + 139^5 \Rightarrow$$

$$2552563125 > 2005703905$$

perciò per **n = 5** la c fermattiana è irrazionale > 144, e **ricavata con :**

- **un programma T. Pascal ed approssimata ad 5 decimali è: 145,24993....;**
- **i logaritmi fornisce lo stesso valore del programma T. Pascal, cioè:**

$$\log c = 1/5 \log(105^5 + 139^5) = 1/5 \log 64601660324 = 1/5 \cdot 10,81031 =$$

$$= 2,16206 \Rightarrow \mathbf{c = 145,2...;}$$

n=6

c-b = 3; c = 142

$$105^6/3 > 142^5 + 142^4 \cdot 139 + 142^3 \cdot 139^2 + 142^2 \cdot 139^3 + 142 \cdot 139^4 + 139^5 \Rightarrow$$

$$105^6/3 > (142^3 + 139^3)(142^2 + 142 \cdot 139 + 139^2) \Rightarrow$$

$$105^6/3 > 554895 \cdot 59223 \Rightarrow$$

4466988546875 > 328622919265;

perciò per **n = 6** la c fermattiana è irrazionale e > 142 che, ricavata con un programma T. Pascal ed approssimata ad 5 decimali è **c = 143,00463...**;

n=7 **c-b=1; c=140**

$$105^7 > 140^6 + 140^5 * 139 + 140^4 * 139^2 + 140^3 * 139^3 + 140^2 * 139^4 + 140 * 139^5 + 139^6 \Rightarrow$$

$$105^7 > (140^3 + 139^3)(140^2 + 140 * 139 + 139^2) + 139^6;$$

$$1407100422765525 > 515906715571839$$

perciò per **n = 7** la c fermattiana è irrazionale e > 140 che, ricavata con un programma T. Pascal ed approssimata ad 5 decimali è **c = 141,63262...**;

Altri c dopo n = 7 sono dati da un programma T.Pascal a 5 decimali:

$$c_8 = 140,76195...; \quad c_9 = 140,19500...; \quad c_{10} = 139,81888...;$$

$$c_{11} = 139,56583...; \quad c_{12} = 139,39369...; \quad c_{13} = 139,27554...$$

tendendo a b = 139, quando $n \rightarrow \infty$.

6° **a = 15** **b = 71** **c-b < 15 = 3*5 divisori di 15² = 225 = 3²*5²; sono: 1,3,5,9;**

n=2 **a²/(c-b) ≥ c+b;**

$$c-b = 9; \quad c = 80; \quad 225/9 < 151; \quad 25 < 151;$$

$$c-b = 5; \quad c = 76; \quad 225/5 < 147; \quad 45 < 147;$$

$$c-b = 3; \quad c = 74; \quad 225/3 < 145; \quad 75 < 145;$$

$$c-b = 1; \quad c = 72; \quad 225 > 143$$

questo vuol dire che c_p è irrazionale, infatti è $c_p = \sqrt{(15^2 + 71^2)} = \sqrt{5266} = 72,5...$ per cui la triade in relazione pitagorica è **(15,71,72.5...);**

Non essendoci interi fermattiani, la soluzione della (1) è irrazionale $\forall (n > 2)$;

Facciamo un esempio ora con b >> a .

7° **a=105; b=191** **Divisori di a² c-b < a : 1,3,5,7,9,15,21,25,35,45,49,63,75.**

n=2 **a²/(c-b) ≥ c+b;**

$$c-b = 75; \quad c = 266 \quad 11025/75 < 457 \rightarrow 147 < 457;$$

$$c-b = 63; \quad c = 254 \quad 11025/63 < 349 \rightarrow 175 < 445;$$

$$c-b = 49; \quad c = 240 \quad 11025/49 < 431 \rightarrow 245 < 431;$$

$$c-b = 35; \quad c = 226 \quad 11025/35 < 417 \rightarrow 315 < 417;$$

$$c-b = 25; \quad c = 216 \quad 11025/25 > 441 \rightarrow 441 > 401;$$

per cui c_p è irrazionale > 216; infatti la triade in relazione pitagorica è

$$(105;191;217,9...);$$

n≥3 **aⁿ/(c-b) ≥ cⁿ⁻¹+...+ bⁿ⁻¹;**

I restanti divisori < 105 di a² per n > 2 sono 1,3,5,7,9,15,21; per cui si ha:

n=3 **c-b = 21; c=212** $1157625/21 < 44944+40492+36481 \rightarrow 55125 < 121917$;
c-b = 15; c=206 $1157625/15 < 42436+39346+36481 \rightarrow 77175 < 118263$;
c-b = 9; c=200 $1157625/9 > 40000+38200+36481 \rightarrow \mathbf{128625 > 114681}$;

Perciò la soluzione della (1) per **n = 3** è irrazionale > di 200 ; infatti, da un programma T. Pascal, è **c = 201,04038...**;

n=4 **c-b = 7; c=198** $121550625/7 > 7762392+7487964+7223238+6967871 \rightarrow$
 $\rightarrow 17364375 < 29441465$;

c-b = 5; c=196 $121550625/5 < 196^3+196^2*191+196*191^2+191^3 \rightarrow$
 $24310125 < (196^2+191^2)(191+196) \rightarrow$
 $24310125 < 27437139$;

c-b = 3; c=194 $121550625/3 > (194^2+191^2)385 \rightarrow$
 $40516875 > 74117*385 \rightarrow \mathbf{40516875 > 28535045}$;

Perciò la soluzione della (1) per **n = 4** è irrazionale > di 198 ; infatti, da un programma T. Pascal, è **c = 195,21928...**;

n=5 **c-b=1; c = 192**
 $105^5 > 192^4+192^3*191+192^2*191^2+192*191^3+191^4 \Rightarrow$
 $12276602525 > 192^2*(192^2+192*191+191^2)+191^3(192+191) \Rightarrow$
 $12276602525 > 36864*110117+2668686593 \Rightarrow$
 $\mathbf{12276602525 > 6728239681}$

Perciò la soluzione della (1) per **n = 5** è irrazionale > di 192; **c = 192,88058...**;

Aumentiamo ulteriormente b >>a:

8° a=105; b=503 **Divisori di a² c-b < a : 1,3,5,7,9,15,21,25,35,45,49,63,75.**

n=2 **a²/(c-b) ≥ c+b;**

c-b = 75; c= 578 $11025/75 < 1081 \rightarrow 147 < 1081$;
c-b = 63; c= 566 $11025/63 < 1069 \rightarrow 175 < 1069$;
c-b = 49; c= 552 $11025/49 < 1055 \rightarrow 225 < 1055$;
c-b = 35; c= 538 $11025/35 < 1041 \rightarrow 315 < 1041$;
c-b = 25; c=528 $11025/25 < 1031 \rightarrow 441 < 1031$;
c-b = 21; c=524 $11025/21 < 1027 \rightarrow 525 < 1027$;
c-b = 15; c=518 $11025/15 < 709 \rightarrow 735 < 1021$;
c-b = 9; c=512 $\mathbf{11025/9 > 1015 \rightarrow 1225 > 1013}$;

per cui c_p è irrazionale > 512; infatti la triade in relazione pitagorica è

(105;503;512,9...);

$$n \geq 3 \quad a^n/(c-b) \geq c^{n-1} + \dots + b^{n-1};$$

I restanti divisori < 105 di a^2 per $n > 2$ sono **1,3,5,7**; per cui si ha:

$$\begin{aligned} n=3 \quad c-b=7; \quad c=510 \quad & 1157625/7 < 510^2+510*503+503^2 \rightarrow 165375 < 769639; \\ c-b=5; \quad c=508 \quad & 1157625/5 < 508^2+508*503+503^2 \rightarrow 231525 < 766597; \\ c-b=3; \quad c=506 \quad & 1157625/3 < 506^2+506*503+503^2 \rightarrow \\ & 385875 < 506^2+506*503+503^2; \\ c-b=1; \quad c=504 \quad & 1157625 > 504^2+504*503+503^2 \rightarrow \\ & 1157625 > 254016+253512+253009 \rightarrow \quad \mathbf{1157625 > 760537}; \end{aligned}$$

Perciò la soluzione della (1) per $n=3$ è irrazionale > di 504; $c=504,52055\dots$;

Per la mancanza di interi fermattiani dopo $n=3$, si deduce che per $n>3$ la soluzione della (1) è sempre irrazionale e compresa tra 503 e 504 ed alcuni valori sono:

$$n=4 \quad c=503,23861\dots; \quad n=5 \quad c=503,03988\dots; \quad n=6 \quad c=503,00694\dots; \quad \text{ecc...}$$

oo

A questa proposta risolutiva dell'UPF si allega il seguente programma T.Pascal :

```

Program potenze;
(* Sviluppa le potenze e loro somme, riscontrabili nella risoluzione dell'UPF con Ruffini
   a^n/(c-b) = c^(n-1) + ...b^(n-1). *)
Var a,b,c,pot,pta,potb,potc,potbc,divi,potadivi,somma,n,k: Real;
BEGIN
    Clrscr;
    write('dammi a intero      a= ');readln(a);
    write('dammi b              b= ');readln(b);
    repeat
        write('dammi n>2      n= ');readln(n);
    until n>2;
        k:=0; pota:=1;
    repeat
        k:=k+1;
        pota:=pota*a;
    until k=n;
    REPEAT
        write('dammi c fermattiano, ricavato da un divisore c-b<a di a^2      c= ');readln(c);
        divi:=c-b; potadivi:=pota/divi; k:=0; potc:=1;

```

```

repeat
    k:=k+1;
    potc:=potc*c;
until k=n-1;
    somma:=0; k:=0; potb:=1; potbc:=1; pot:=potc;
repeat
    k:=k+1;
    pot:=pot/c;
    potb:=potb*b;
    potbc:=pot*potb;
    somma:=somma+potbc;
until k=n-1;
    somma:=somma+potc;
write('somma= ',somma:1:0);
if potadivi< somma then
    write('potadivi< somma, cioè ',potadivi:1:0,' < ',somma:1:0)
else
begin
    writeln('potadivi> somma, cioè');
    writeln(potadivi:1:0,' > ',somma:1:0,');
end;
UNTIL potadivi > somma;
END.

```